

Exercices

1	Logique, Ensembles	2
2	Nombres	4
3	Calculs	5
4	Trigonométrie, Complexes	8

Logique, Ensembles

Dans tous les exercices, E, F, G désignent des ensembles, A et B des parties de E . n est un entier naturel.

exercice 1

Un élevage de lapin est touché par la myxomatose. On considère les assertions suivantes :

P : « Tous les mâles de l'élevage sont infectés. »

Q : « Dans l'élevage, il existe un mâle sain et une femelle saine. »

1. Écrire la négation de P et la négation de Q.
2. Réécrire P avec une tournure « Si... alors... ». Donner la contraposée et la réciproque de P.
3. Dire pour chacune des assertions suivantes si elle est vraie ou fausse :
 - « Pour prouver que P est vraie, il suffit de vérifier que tous les lapins sains sont des femelles. »
 - « Pour prouver P, il est nécessaire de vérifier que toutes les femelles sont saines. »
 - « Pour prouver que P est fausse, il suffit de trouver un mâle sain. »
 - « Pour prouver que P est fausse, il est nécessaire de vérifier que tous les mâles sont sains. »
 - « Pour prouver que Q est vraie, il suffit de trouver une femelle saine. »
 - « Pour prouver que Q est vraie, il est nécessaire de trouver une femelle saine. »
 - « Pour prouver que Q est fausse, il suffit de vérifier que toutes les femelles sont infectées. »
 - « Pour prouver que Q est fausse, il est nécessaire de vérifier que tous les lapins sont infectés. »

exercice 2

Considérons les propositions A : « Il pleut » et B : « Le sol (de la rue) est mouillé ».

Si « il pleut », alors « le sol est mouillé ». Ainsi la proposition $A \Rightarrow B$ est vraie.

On peut dire aussi (compléter avec le vocabulaire du cours) :

« Il pleut » est une condition pour que le sol de la rue soit mouillé.

Mais elle n'est pas (car le sol sera aussi mouillé si un employé municipal vient de le nettoyer...)

– Pour qu'il pleuve, il que le sol soit mouillé.

– « Le sol est mouillé » est une condition pour qu'il pleuve.

– Pour que le sol soit mouillé, il qu'il pleuve.

exercice 3

Compléter les pointillés par l'un des symboles \Leftrightarrow , \Rightarrow , \Leftarrow ou une croix si aucune implication n'est vraie. Pour chaque implication fausse, on donnera un contre-exemple.

$x = 2$ $x^2 = 4$

$x < y$ $x^2 < y^2$

$x < y$ $\ln(x) < \ln(y)$

$x < y$ $e^x < e^y$

exercice 4

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. la fonction f ne s'annule pas
2. l'image par la fonction f de tout entier naturel est un entier naturel
3. la fonction f est majorée
4. la fonction f n'est pas paire
5. la fonction f admet pour période 2π .
6. L'équation $f(x) = 2$ admet au moins deux solutions distinctes
7. Les valeurs de f sont comprises entre 2 et 3

exercice 5

Prouver qu'un entier n est pair si, et seulement si n^2 est pair.

exercice 6 Démontrer les assertions ci-dessous :

1. (*contraposée*) si $a + b$ est irrationnel alors ou a ou b est irrationnel.
2. (*absurde*) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
3. (*disjonction*) Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$:
4. (*disjonction*) $\forall x \in \mathbb{R}; |x - 1| \leq x^2 - x + 1$:
5. (*analyse-synthèse*) Toute fonction f définie sur \mathbb{R} s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

exercice 7 Existe-t-il une fonction f sur \mathbb{R} vérifiant

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(y) > f(x)$$

exercice 8 Dans cet exercice, I est un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions.

Pour chaque assertion ci-dessous, la traduire en français courant puis formuler son contraire en quantificateurs.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
2. $\forall y > 0, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = y$.
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
4. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$.
5. $1 \leq x < y$
6. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

exercice 9

Les assertions suivantes concernent une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Déterminer à chaque fois si l'assertion est toujours vraie, toujours fausse, ou si ça dépend de f .

1. $\forall x \geq 0; \exists y \leq 0; f(x) = f(y)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R} : x \neq y \text{ et } f(x) \neq f(y)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R} : f(x) = y$
4. $\exists x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R} : f(x) = f(y)$
5. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 2f(x)$
6. $\forall s \in \mathbb{R}; \exists t \in \mathbb{R}; f(t) = s$

exercice 10 Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \llbracket 1; n \rrbracket$ et $B_n = [n, n + 1]$.

Déterminer $\bigcup_{k=1}^{10} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{10} A_k$, $\bigcup_{k=1}^n A_k$ et $\bigcap_{k=1}^n A_k$

puis $\bigcup_{k=1}^{10} B_k$, $\bigcap_{k=1}^{10} B_k$, $\bigcup_{k=1}^n B_k$ et $\bigcap_{k=1}^n B_k$

exercice 11

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $B = [-1; 1]^2$. Montrer $A \subset B$

exercice 12 Soit $E = \{1; 2; 3; 4\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$

exercice 13

Soit $E = \{1; 2\}$ et $F = \{3; 4; 5\}$.

Expliciter les éléments de $E \times F$ et $F \times E$

exercice 14 Donner la liste des éléments des ensembles suivants :

1. $\llbracket 1; 3 \rrbracket \times \{-1; \}$
2. $\{x^2, x \in \{-1, 0, 1\}\}$
3. $\{-1, 1\}^3$

exercice 15 Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$A = B \iff A \cup B = A \cap B$$

exercice 16 Représenter graphiquement à main levée les parties de \mathbb{R}^2 suivantes. On utilisera un repère par ensemble.

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 \leq 0\}$
4. $\{(x, y) \in \llbracket 0; n \rrbracket, x + y = n\}$
5. $\{(x^2, x), x \in \mathbb{R}\}$

exercice 17 Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $5^n \geq 4^n + 3^n$.

exercice 18 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
2. Donner un exemple de x réel non entier qui vérifie cette propriété.

exercice 19 Soit x un nombre réel positif.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $(1+x)^n \geq 1+nx$.

exercice 20

- 1) Démontrer que, pour n entier quelconque, il existe un unique $(a_n; b_n) \in \mathbb{N}^2$, tel que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$
- 2) Pour tout entier n , exprimez a_{n+1} et b_{n+1} à l'aide de a_n et b_n .
- 3) Écrire un programme Python qui demande une valeur de n et renvoie a_n et b_n .

exercice 21 Déterminer le terme général de la suite u de premiers termes $u_0 = 1, u_1 = 3$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

exercice 22 Soit (u_n) définie par $u_1 = u_2 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n)$.
Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n-1)!$

exercice 23 Prouver que, pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \leq n! \leq n^n$

exercice 24 Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$

exercice 25 Démontrer les propositions suivantes :

- a. $\forall n \geq 4, n^2 \leq 2^n$
- b. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$

exercice 26 Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto (x-1)e^{-x}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g^{(n)}$ comme la fonction dérivée n -ième de g obtenue en dérivant g , n fois. En particulier, $g^{(0)} = g$ et $g^{(1)} = g'$.
Démontrer que pour tout réel x ,

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n (x - n - 1)e^{-x}$$

BORNE SUPÉRIEURE, MIN, MAX

exercice 27 Soit A et B deux parties finies de \mathbb{R} telles que $A \subset B$.
Prouver que $\min(A) \geq \min(B)$ et $\max(A) \leq \max(B)$

exercice 28 Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer (s'ils existent) :

- la borne supérieure de A
- le maximum de A
- la borne inférieure de A
- le minimum de A .

exercice 29 Soit $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que A est borné, déterminer ses bornes. A admet-il un maximum ? un minimum ?

exercice 30 Mêmes questions pour $B = \left\{ \frac{p}{q} + \frac{q}{p} ; (p; q) \in (N^*)^2 \right\}$

exercice 31 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $|x^2 - 1| \leq 3$

VALEUR ABSOLUE

exercice 32 Tracer l'allure de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto |x + 1| - |2x - 4|$

exercice 33 Calculer $\int_{-1}^1 \exp(-|x| + 1) dx$.

PARTIE ENTIÈRE

exercice 34 Tracer l'allure du graphe de la fonction $x \mapsto [x]$ sur $[-3; 3]$

exercice 35 Résoudre dans \mathbb{R} $\left[x + \frac{3}{4} \right] = -1$

exercice 36 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x \left[\frac{1}{x} \right]$

1. Exprimer $f(x)$ pour $x > 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Par une méthode analogue, étudier la limite de f en $-\infty$.
3. Encadrer $f(x)$ pour $x > 0$. En déduire la limite de f à droite en 0.
4. Par une méthode analogue, étudier la limite de f à gauche en 0.

exercice 37 **inégalité arithmético-géométrique**

Prouver que pour tous $(x; y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Calculs

exercice 38 Démontrer par récurrence les formules de référence non traitées en cours parmi :

$$\sum_{k=0}^n k ;$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 ;$$

$$\sum_{k=0}^n k^3$$

exercice 39 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n k(k-2)$

exercice 40 Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $S_{n,m} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^m ki \right)$

exercice 41 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n (k-1)^2$

exercice 42 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n (n-k)^3$

exercice 43 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

exercice 44

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

exercice 45

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=1}^n 2^{2k-1}$

exercice 46

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}$

exercice 47

Ici, $i \in \mathbb{C}$ est le nombre tel que $i^2 = -1$. Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n e^{ki\omega}$

Donner le résultat sous forme exponentielle.

exercice 48

Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$.

Écrire un programme Scilab demandant un nombre n en entrée et calculant la somme.

exercice 49

(★★★) Calculer $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k$

exercice 50

Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

exercice 51

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k}$ à l'aide de la notation factorielle.

exercice 52

n est un entier naturel non nul. Reformuler les sommes suivantes comme sur l'exemple (on explicitera les trois premiers et les deux derniers termes).

Exemple : $\sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1)$

a. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \dots$

c. $\sum_{k=0}^n (2k+1) \dots$

b. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k-n} \dots$

d. $\sum_{k=1}^n u_k - u_{k+1}$ où $(u_n)_n$ suite de réels \dots

exercice 53

Reformuler les expressions suivantes à l'aide de \sum ou \prod

a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2048} \dots$

b. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} \dots$

c. $a_0 b_9 + a_1 b_8 + a_2 b_7 + \dots + a_9 b_0 \dots$

d. $z_1 - z_2 + z_3 - z_4 + \dots + z_{31} - z_{32} \dots$

exercice 54

Montrer que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$\sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1$$

exercice 55

Calculer les expressions suivantes.

a. pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n x^k \dots$

b. pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \dots$

c. pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \left(\frac{-1}{3}\right)^k \dots$

d. pour $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=1}^n e^{2^k} \dots$

exercice 56 Exprimer avec le symbole \sum ce que calcule l'algorithme suivant.

```
Demander  $n$ 
 $S = 0$ 
Pour  $i$  allant de 1 à  $n$  :
     $S \leftarrow S + \frac{1}{(i+n)^2}$ 
Fin pour
```



exercice 57 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Prouver que $\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

2) Écrire une fonction SCILAB `function p=produit(n)` qui calcule le produit des n premiers entiers impairs.

exercice 58 Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$

exercice 59 Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^n kq^k$

exercice 60 Calculer $\sum_{i=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$ pour $n \geq 2$

exercice 61 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

a. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$

b. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$

c. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}$

d. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$

exercice 62

a. Déterminer des constantes réelles a , b , et c telles que

$$\forall k \geq 3, \quad \frac{1}{k(k^2 - 4)} = \frac{a}{k-2} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+2}$$

b. En déduire une expression en fonction de n de la somme $\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k^2 - 4)}$ pour $n \geq 3$.

On pourra introduire les nombres $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

exercice 63 Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}$$

exercice 64 Montrer que, pour tout $n \geq 3$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k} > \frac{3}{5}$$

exercice 65 Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k! \leq n!$

exercice 66 Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + \ln k} = 0$

Trigonométrie, Complexes

exercice 67 Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin \theta$

exercice 68 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^\pi \sin^2(x) \, dx \quad ,$$

$$I_2 = \int_0^\pi \cos^4(x) \, dx \quad \text{et}$$

$$I_3 = \int_0^\pi \cos(2x) [\sin(x)]^3 \, dx$$

NOMBRES COMPLEXES

exercice 69 Déterminer les parties réelles et imaginaires de $\left(\frac{i - \sqrt{3}}{1 + i}\right)^{10}$

exercice 70 Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe $\frac{1 - it}{2t + i(1 - t^2)}$ est bien définie et exprimer sa partie réelle et sa partie imaginaire en fonction de t .

exercice 71 Soit $u \in \mathbb{C}$ de module 1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R}$

exercice 72 On représente un nombre complexe $z = x + yi$ par la liste $z = [x, y]$.
Écrire une fonction `AddC(u, v)` renvoyant la somme de deux nombres complexes représentées par les listes u et v .
Écrire une fonction `MultC(u, v)` renvoyant le produit de deux nombres complexes représentées par les listes u et v .

exercice 73 On note $P := \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$. On considère l'application $f : P \rightarrow \mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in P, f(z) = \frac{z - i}{z + i}$.

1. Montrer que f est bien définie puis déterminer la partie D de \mathbb{C} telle que f définisse une bijection de P sur D .
2. On note A le point du plan d'affixe i . Soit D_i le disque ouvert de centre A et de rayon 1. Déterminer $f(D_i)$.

exercice 74 Déterminer les racines carrées de

$$z_1 = 2i, \quad z_2 = 9, \quad z_3 = 3 + 4i \quad \text{et} \quad z_4 = 3 - 5i$$

exercice 75 Résoudre dans \mathbb{C} les équations :

$$z^4 + 1 = 0 \quad , \quad 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 = 0 \quad \text{et} \quad z^6 - 6z^3 + 12 = 0$$

exercice 76 Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que $|u| + |v| \leq |u + v| + |u - v|$

exercice 77 Montrer que, pour tout $\theta \in [0; \pi[\cup]\pi; 2\pi]$, on a :

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = i \tan \frac{\theta}{2}$$

exercice 78 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$(\mathcal{E}) \quad (z - 1)^6 + (z - 1)^3 + 1 = 0$$

exercice 79 Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z - 1)^n = (z + 1)^n$

exercice 80 Déterminer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

exercice 81 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

Calculer C_n et S_n en fonction de n et θ .

Écrire une fonction python prenant un entier n en entrée et calculant C_n .

exercice 82 S'entraîner à linéariser des expressions comme $\sin^p(\theta) \cos^q(\theta)$.

Utiliser Geogebra pour vérifier que les courbes de la fonction initiale et de sa linéarisée coïncident...

