

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE À L'ISSUE DE LA SÉQUENCE...

- connaître et utiliser les symboles  $\sum$  et  $\prod$  et leurs propriétés
- effectuer un changement d'indice dans une somme
- connaître et utiliser la notation  $n!$
- connaître et utiliser les sommes de référence
- calculer des sommes
- démontrer des inégalités simples
- rédiger un raisonnement par récurrence

# Nombres

Nombres entiers, raisonnement par récurrence	2
récurrence simple	2
récurrence double	2
récurrence forte	2
Ensemble des nombres réels	2
Intervalles de $\mathbb{R}$	4
Valeur absolue	5
Partie entière	7
Exposants, racine carrée	8
Identités remarquables	9
Théorème de la borne supérieure	9

## DIFFÉRENTS NOMBRES POUR DIFFÉRENTES MODÉLISATIONS

Les ensembles de nombres communément utilisés en BCPST sont  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .  
L'espace-temps présente à notre échelle toutes les apparences de la continuité. Les nombres réels, et plus généralement les espaces type  $\mathbb{R}^n$  permettent de représenter plusieurs dimensions continues d'informations. Par exemple, la position d'un objet à un instant  $t$  sera modélisée par quatre réels  $(x, y, z, t)$ . On peut aussi modéliser la trajectoire par une application  $t \mapsto (x(t); y(t); z(t))$  continue.

- la continuité (de valeurs, de fonctions)
- le fait de pouvoir se rapprocher aussi près qu'on veut, (limite en  $a \in \mathbb{R}...$ ) ...les fonctions

sont typiques des nombres réels.

Quand les valeurs sont séparées, on parle de modélisation discrète. Par exemple, on mesure le pH toutes les minutes, la masse tous les jours. On aura alors une suite de valeurs.

Les valeurs successives sont indexées par des entiers, ce qui permet de parler :

- de valeur initiale (premier terme, généralement  $u_0$ )
- de valeur suivante ( $u_{n+1}$  est le terme suivant  $u_n$ )

Les nombres entiers permettent de parler de valeur suivante, ce que ne permettent pas les nombre réels.

# Nombres entiers, raisonnement par récurrence

## Propriété 1 (Principe de récurrence)

### RÉCURRENCE SIMPLE

Soit  $n$  un entier, et  $\mathcal{P}(n)$  une proposition dépendant de  $n$ .  
Si  $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie (initialisation) et si  $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$  (hérédité) alors  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

**Preuve :** Admis

## Propriété 2 (Récurrence double)

### RÉCURRENCE DOUBLE

Soit  $n$  un entier, et  $\mathcal{P}(n)$  une proposition dépendant de  $n$ .  
Si  $\mathcal{P}(n_0)$  et  $\mathcal{P}(n_0+1)$  sont vraies (initialisation)  
et si  $\forall n \geq n_0, (\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$  (hérédité),  
alors  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

## Propriété 3 (Récurrence forte)

### RÉCURRENCE FORTE

Soit  $n$  un entier, et  $\mathcal{P}(n)$  une proposition dépendant de  $n$ .  
Si  $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie (initialisation)  
et si  $\forall n \geq n_0, (\forall k \in \llbracket n_0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$  (hérédité)  
alors  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

# Ensemble des nombres réels

### NOTATIONS

On note

- $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$  l'ensemble des nombres réels positifs :  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_-$  l'ensemble des nombres réels négatifs :  $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
- $\mathbb{R}^*$  l'ensemble des nombres réels non nuls :  $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

## Propriété 4 (inégalités et somme)

### QUELQUES RAPPELS SUR L'ORDRE

Pour tous réels  $a, b, c, d$ , tels que  $a < b$  et  $c \leq d$ , on a :

$$a + c < b + d$$

En particulier, si  $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$  et  $(v_k)_{0 \leq k \leq n}$  sont des réels tels que  
 $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, u_k \leq v_k$ , on a :

$$\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k$$

**Remarque :** Dans ce qui précède si l'une des inégalités  $u_k \leq v_k$  est en fait stricte, l'inégalité finale est stricte également.

Cette propriété sera très utilisée pour encadrer le terme général d'une suite définie par une somme.

**Propriété 5 (inégalités et produit par un réel positif)**

Soit  $a, b$  deux réels tels que  $a \leq b$  et  $k$  un réel strictement positif. Alors

$$k.a \leq k.b$$

Soit  $a, b$  deux réels tels que  $a \leq b$  et  $k$  un réel strictement négatif. Alors

$$k.a \geq k.b$$

**Propriété 6 (inégalités et fonction monotone)**

Plus généralement, soit  $a, b$  deux réels d'un intervalle  $I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ .

- Si  $f$  est strictement croissante, alors  $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
- Si  $f$  est croissante, alors  $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
- Si  $f$  est strictement décroissante, alors  $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
- Si  $f$  est décroissante, alors  $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

Il faudra toujours penser à **justifier** les enchaînements d'inégalités. En particulier, quand on multiplie par une quantité dépendant d'une variable, justifier son signe, si on compose par une fonction, justifier que l'on est dans un intervalle sur lequel celle-ci est monotone.

VOIR AUSSI

Nous reparlerons d'inégalités dans les thèmes suivants :

- fonctions
- limites et inégalités
- intégrales
- on peut démontrer une famille d'inégalités par récurrences
- ...

INTERVALLES DE  $\mathbb{R}$ 

On représente souvent  $\mathbb{R}$  par l'ensemble des abscisses des points de la droite graduée, que l'on parcourt de manière continue.

**Définition 1 (Intervalle)**

Soit  $I$  un ensemble de réels. On dit que  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  quand :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq z \leq y \implies z \in I).$$

*Exemples*

Exemple n° 1  $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, [0, 5[, ]3, 18[$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{R}^*$  n'en est pas un car il contient -1 et 1 mais pas 0.

$\emptyset$  est un intervalle

*Remarque*

Si un intervalle non vide est borné, il contient alors tous les réels strictement compris entre sa borne inférieure et sa borne supérieure.

Il y a 9 types d'intervalles

Intervalle	Représentation graphique	Inégalité
$x \in [a; b]$		$a \leq x \leq b$
$x \in [a; b[$		$a \leq x < b$
$x \in ]a; b]$		$a < x \leq b$
$x \in ]a; b[$		$a < x < b$
$x \in ]-\infty; +\infty[$		$x \in \mathbb{R}$ (tous les $x$ )
$x \in ]-\infty; b[$		$x < b$
$x \in ]-\infty; b]$		$x \leq b$
$x \in ]a; +\infty[$		$a < x$
$x \in [a; +\infty[$		$a \leq x$
$x \in \emptyset$		aucun $x$

Un intervalle de la forme  $[a; b]$  est dit **fermé**

Un intervalle de la forme  $]a; b[$  est dit **ouvert**

Le symbole  $\infty$  se prononce « infini ». Un intervalle est toujours ouvert en  $\pm\infty$  (un nombre  $x$  ne peut être égal à  $\infty$  qui n'est pas un nombre).

**Remarque :** Un intervalle peut être inclus dans un autre intervalle.

Par exemple,  $[0; 1] \subset [0; 2]$  ou  $]0; 1[ \subset [0; 1]$  mais  $[0; 1]$  n'est pas inclus dans  $]0; +\infty[$

### VALEUR ABSOLUE

#### Définition 2 (Valeur absolue)

Pour tout réel  $x$ , le maximum de l'ensemble  $\{x, -x\}$  est la valeur absolue de  $x$ , notée  $|x|$ . En pratique, pour tout réel  $x$ ,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

#### Propriété 7

Pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a :

$$|x| \geq 0 \quad (1.1)$$

$$|x|^2 = x^2 \quad (1.2)$$

$$|x| = \sqrt{x^2} \quad (1.3)$$

$$|x| = 0 \implies x = 0 \quad (1.4)$$

$$|xy| = |x| |y| \quad (1.5)$$

**Preuve :** (1)  $x$  et  $-x$  sont opposés. L'un des deux est positif donc  $|x| = \max(x, -x) \geq 0$

(2)  $|x|$  est égal à  $x$  ou à  $-x$ . Dans les deux cas,  $|x|^2 = x^2$

(3) d'après (1),  $|x| \geq 0$ . Donc, par définition de la racine carrée,  $|x| = \sqrt{x^2}$

(4)  $x = |x|$  ou  $x = -|x|$ . Donc dans les deux cas, si  $|x| = 0$ ,  $x = 0$

(5)  $(|x| |y|)^2 = |x|^2 |y|^2 = x^2 y^2 = (xy)^2 = |xy|^2$

Donc  $|xy| = |x| |y|$  car deux nombres positifs ayant même carré sont égaux.

Pour manipuler des valeurs absolues, on cherchera le plus souvent à raisonner par séparation des cas.

#### Propriété 8 (Inégalité triangulaire)

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

**Preuve :** Soit  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ . Élevons au carré les trois membres de l'inégalité.

$$\begin{aligned}
(|x| - |y|)^2 &= |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 = x^2 + y^2 - 2|xy| \\
|x + y|^2 &= (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \\
(|x| + |y|)^2 &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = x^2 + y^2 + 2|xy|
\end{aligned}$$

Or,  $-|xy| \leq xy \leq |xy|$

On en déduit l'inégalité triangulaire. □

### Propriété 9 (*Inégalité triangulaire*)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

**Preuve :**(D.A.C) Le résultat est vrai pour  $n = 1$  (la somme comporte alors un unique terme).

Pour  $n \geq 2$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  : « pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$  »

**I** La propriété précédente prouve que  $\mathcal{P}(2)$  est vraie.

**H** Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie. Soit  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Alors

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| &= \left| x_{n+1} + \sum_{k=1}^n x_k \right| \\
&\leq |x_{n+1}| + \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \text{ d'après la propriété précédente} \\
&\leq |x_{n+1}| + \sum_{k=1}^n |x_k| \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n+1} |x_k| \text{ par hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, ce qui prouve l'hérédité.

**C** Pour tout  $n \geq 2$ , pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$

**Définition 3 (Partie entière)**

Pour tout réel  $x$ , il existe un unique entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n \leq x < n + 1$ .  
L'entier  $n$  est appelé la partie entière de  $x$ , que l'on note  $\lfloor x \rfloor$ .

**Preuve :** On admet l'existence. Montrons l'unicité. Supposons que  $n$  et  $n'$  sont deux entiers qui conviennent. On a  $n \leq x < n' + 1$ , et donc  $n \leq n'$ . De même,  $n' \leq n$ , et donc  $n = n'$ . D'où l'unicité.  $\square$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a donc  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ .

Exemples

Exemple n° 2 On a :  $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$  ,  $\lfloor 2 \rfloor = 2$  ,  $\lfloor -2,5 \rfloor = -3$  ,  $\lfloor 0,8 \rfloor = 0$ .

**Propriété 10 (Partie entière de la somme d'un réel et un entier)**

Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , et  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor .$$

**Preuve :** (D.A.C)

On cherche l'encadrement de  $n + x$  par deux entiers successifs qui pourra permettre d'utiliser la définition. Par définition de  $\lfloor x \rfloor$ ,  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ . Donc en ajoutant  $n$  à tous les membres,  $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$ , avec  $\lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{Z}$ . Donc par définition de la partie entière de  $n + x$ ,  $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$ .  $\square$



**Attention :** la plupart des autres opérations que l'on pourrait vouloir effectuer avec la partie entière sont fausses. On ne peut notamment pas sommer dans le cas général, ni multiplier par un scalaire.

Exemples

Exemple n° 3 Chercher un contre-exemple qui montre que  $\lfloor \lambda x \rfloor \neq \lambda \lfloor x \rfloor$ .

En effet,  $\lfloor 2\frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$  alors que  $2 \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 2 \times 0 = 0$ .

## Exemples

Exemple n° 4

- Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Déterminer un encadrement de  $\lfloor y \rfloor$  en fonction de  $y$ .

On sait par définition que  $\lfloor y \rfloor \leq y$  et  $y < \lfloor y \rfloor + 1$ . Donc  $\lfloor y \rfloor \leq y$  et  $y - 1 < \lfloor y \rfloor$ , ce qui donne  $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$ .

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Dédurre de la question précédente la limite de la suite  $\left( \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on applique la question précédente à  $y = nx$  :  $\frac{nx - 1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq \frac{nx}{n}$ . On a donc  $x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$ , et la suite converge vers  $x$  par théorème d'encadrement.

## EXPOSANTS, RACINE CARRÉE

**Définition 4**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ . On définit  $x^n = \underbrace{x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$  et  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ .

Par convention,  $x^0 = 1$

**Propriété 11**

Pour tout  $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$  et pour tout réel  $x \neq 0$ , on a :

$$\begin{aligned}(xy)^n &= x^n y^n \\ x^{n+p} &= x^n x^p \\ (x^n)^p &= x^{np}\end{aligned}$$

**Définition 5**

Pour tout réel positif  $x$ , il existe un unique réel **positif** noté  $\sqrt{x}$  tel que  $\sqrt{x}^2 = x$

**Propriété 12**

Pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ , on a :  $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

$$\text{Si } y > 0, \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$\text{Si } x > 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z}, \sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n$$



## IDENTITÉS REMARQUABLES

## Propriété 13

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3b^2a \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Ces formules seront généralisées dans le chapitre sur les sommes (formule du binôme de Newton...)

## THÉORÈME DE LA BORNE SUPÉRIEURE

Définition 6 (*Majorant, minorant*)

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

- Un majorant de  $A$  est un élément  $M$  de  $\mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in A, \quad x \leq M.$$

- Un minorant de  $A$  est un élément  $m$  de  $\mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in A, \quad x \geq m.$$

Propriété 14 (*Théorème de la borne supérieure*)

Tout sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  non vide et majoré (resp. minoré) admet un plus petit majorant (resp. un plus grand minorant). Il est appelé borne supérieure de  $A$  notée  $\sup A$  (resp. borne inférieure notée  $\inf A$ ).

**Preuve :** Ce théorème est admis.

Avec les  
quantificateurs.

- Le réel  $\alpha$  est la borne supérieure d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  si, et seulement si

$$\begin{cases} \forall x \in A, & x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists x \in A, \quad \alpha - \varepsilon < x \end{cases}$$

- Le réel  $\alpha$  est la borne inférieure d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  si, et seulement si

$$\begin{cases} \forall x \in A, & x \geq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists x \in A, \quad \alpha + \varepsilon > x \end{cases}$$

Définition 7 (*Maximum, minimum*)

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

- On dit que  $M$  est le maximum de  $A$  si  $\begin{cases} M \in A \\ \forall x \in A, & x \leq M. \end{cases}$

- On dit que  $m$  est le minimum de  $A$  si  $\begin{cases} m \in A \\ \forall x \in A, & x \geq m \end{cases}$

Un ensemble  $A$  ne possède pas nécessairement de majorant ou minorant, et s'ils existent, il ne sont pas uniques. De même,  $A$  n'admet pas nécessairement de maximum ou minimum. Par contre, s'ils existent, majorant et minorant sont uniques.

### Notations

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . Quand ils existent, on note :

$\sup(A)$  la borne supérieure de  $A$

$\inf(A)$  la borne inférieure de  $A$

$\max(A)$  le maximum de  $A$

$\min(A)$  le minimum de  $A$

Par convention,

- on note  $\sup A = +\infty$  si  $A$  n'admet pas de borne supérieure.
- on note  $\inf A = -\infty$  si  $A$  n'admet pas de borne inférieure.

### Propriété 15

Toute partie **finie** de  $\mathbb{R}$  admet un minimum et un maximum.

### Exemples

Exemple n° 5 •  $\mathbb{R}$  et  $[0, +\infty[$  ne possèdent pas de majorants, ni de maximum.

- Par contre,  $[0, 5]$  et  $[0, 5[$  possèdent des majorants.

Par exemple, 5, 6, 10, ou plus généralement tout réel  $x \geq 5$  sont des majorants.

5 est le plus petit de ces majorants. 5 est donc la borne supérieure de  $[0, 5[$  et de  $[0, 5]$

- L'ensemble  $[0, 5]$  possède également un maximum : 5.

$[0, 5[$  ne possède pas de maximum.

- La propriété de la borne supérieure n'est pas vérifiée dans  $\mathbb{Q}$ .

Par exemple,  $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$  est une partie de  $\mathbb{Q}$ , majorée et n'ayant pas de borne supérieure dans  $\mathbb{Q}$ .

### Propriété 16

Quand une partie de  $\mathbb{R}$  admet un maximum, alors celui-ci est sa borne supérieure.

Quand une partie de  $\mathbb{R}$  admet un minimum, alors celui-ci est sa borne inférieure.

### Quelques remarques

Dans le cas où  $A$  est non vide et majoré,

- $\sup A$  n'est pas forcément un élément de  $A$ , à la différence de  $\max A$  qui, **s'il existe**, est nécessairement un élément de  $A$ .
- si  $\max A$  existe, alors  $\max A = \sup A$ .
- $\sup A$  est unique, il y a par contre une infinité de majorants.